

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТЕЛЕЧНОГО УЗЛА ОБУВИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗКИ**INTERNAL STRESSES AND MOVEMENTS OF THE ASSEMBLED SHOES INSOLE UNDER THE INFLUENCE OF LOAD**

УДК 685.34.017.35

Г.Н. Федосеев, Т.М. Борисова**Витебский государственный технологический университет*<https://doi.org/10.24411/2079-7958-2020-13908>**G. Fedoseev, T. Borisova****Vitebsk State Technological University*

РЕФЕРАТ

ЭЛЕМЕНТ БАЛКИ, УПРУГАЯ СВЯЗЬ, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ, ТРАНСПОНИРОВАНИЕ, МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ

В статье рассматривается алгоритм определения деформированного состояния балки, моделирующей стелечный узел обуви, позволяющий найти внутренние усилия (поперечные силы и изгибающие моменты), а также упругие перемещения (прогибы и углы поворота поперечных сечений) под действием сосредоточенных сил в условиях кусочно-линейной жёсткости поперечных сечений упругих связей (трапеций в плане).

Поставленная задача решается исходя из принципа виртуальных перемещений. На базе алгебры матриц связываются векторы-столбцы заданных сосредоточенных сил и моментов с внутренними усилиями.

Последние выражаются посредством матрицы жёсткости через деформации, а деформации – через перемещения. Как результат получаем уравнения равновесия в перемещениях.

Матрицы жёсткости строятся путём интегрирования приближенных дифференциальных уравнений упругих связей с переменной по длине жёсткостью (изменяющейся по линейному закону).

Результаты работы могут использоваться при анализе деформированного состояния низа обуви. При этом может решаться как прямая задача определения перемещений при заданных силовых факторах, так и обратная (возможно, более важная) подбора жёсткостей поперечных сечений стелечного узла, обеспечивающих заданные перемещения.

ABSTRACT

ELEMENT OF THE BEAM, ELASTIC JOINT, MOVEMENT, INTERNAL EFFORTS, VECTOR-COLUMN, TRANSPOSE, STIFFNESS MATRIX

The article describes the development of algorithms that always allow dealing with deformed states of systems. These systems include assembled shoe insoles. As a model, the author used an elastic beam loaded with concentrated forces (and, possibly, concentrated moments). The relatively smooth outlines of the assembled insoles are replaced by a broken outline. Infinitely small load-bearing elements are represented by assembled insoles connected by trapezoidal elastic bonds. Integration of approximate differential equations of plane bends resulted in the final construction of mathematical equations.

Algebra made it possible to compactly formulate the equilibrium equations connecting the rear force factors. Recent changes in the matrix reflect the relationship between internal forces and deformations.

However, the task of displacements finding is simplified.

As a result, a matrix algorithm was found that allows not only to find the stress-strain state of the node trunk, but also to solve the problem of selecting its sections that provide the required displacements.

The article describes an example of determining the deflections and rotation angles of a pinched assembled insole. The calculation results are comparable with experimental data.

* E-mail: borisova@vstu.by (T. Borisova)

Известно, что в обуви с каблуком для обеспечения надёжной опоры своду стопы, обеспечения правильного положения стопы в процессе ходьбы, геленочная часть обуви (особенно с увеличением высоты каблука) должна обладать определенной жесткостью и оказывать сопротивление оказываемым нагрузкам.

Для обеспечения объективной оценки качества стелечных узлов обуви, а также для прогнозирования величины прогибов геленочной части стелечного узла при эксплуатации, необходима разработка методики расчёта, позволяющей найти внутренние усилия (поперечные силы и изгибающие моменты), а также упругие перемещения стелечного узла обуви под воздействием нагрузки.

Авторами [1] была разработана расчётная схема несущей конструкции женской обуви, в которой геленочная часть обуви была представлена балкой. Нагрузки, действующие на геленочную часть обуви, заменили более простой и удобной для расчёта схемой. Разработанная ме-

тодика была проверена на экспериментальном образце, анализ результатов показал, что теоретическая модель низа женской обуви позволяет с точностью только до 15 % оценивать прогибы геленочной части низа обуви.

Таким образом, целью данной работы являлась разработка алгоритма определения деформированного состояния стелечного узла обуви, который позволит с достаточной степенью точности определять прогибы (перемещения) стелечного узла обуви под воздействием нагрузки, что даст возможность осуществить рациональный подбор материалов для стелечного узла ещё на этапе конструкторско-технологической подготовки производства обуви.

При разработке методики расчёта внутренних усилий и перемещений стелечного узла для низа обуви необходимо составить и обосновать расчетную схему нагружения. Стелечный узел в обуви представим балкой с кусочно-линейной жёсткостью, нагруженной сосредоточенными силами и моментами (рисунок 1).

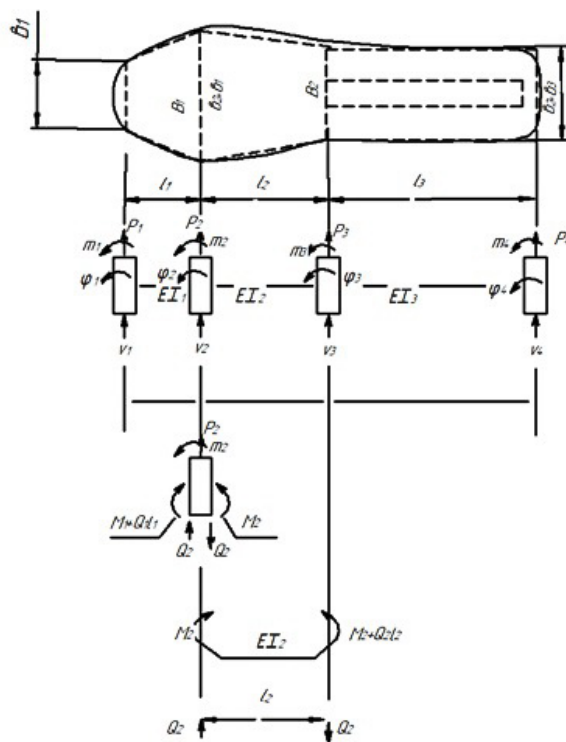


Рисунок 1 – Несущие элементы с упругими связями

Следуя принципу виртуальных перемещений [2, с. 448], напишем уравнение

$$\sum_{k=1}^n P_k \delta v_k - \sum_{l=1}^m M_l \delta(\Delta v_l) = 0, \quad (1)$$

или

$$\vec{P}^T \cdot \delta \vec{v} - \vec{M}^T \delta(\Delta \vec{v}) = 0.$$

В уравнении (1) введены матричные векторы-столбцы (2) заданных сил; внутренних сил; перемещений бесконечно коротких элементов, выделенных из балки; деформаций упругих связей между ними.

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ m_1 \\ P_2 \\ m_2 \\ \vdots \\ P_n \\ m_n \end{bmatrix}, \vec{M} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ \vdots \\ Q_m \\ M_m \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \varphi_n \end{bmatrix}, \Delta \vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta \varphi_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta \varphi_2 \\ \vdots \\ \Delta v_m \\ \Delta \varphi_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

Деформации связаны с перемещениями:

$$\Delta \vec{v} = A \vec{v}, \quad (3)$$

их вариации

$$\delta(\Delta \vec{v}) = A \delta \vec{v}. \quad (4)$$

Используя вариации (4) в уравнении (2) и транспонируя его, получим

$$\Delta \vec{v}^T (\vec{P} - A^T \vec{M}) = 0,$$

откуда следуют уравнения равновесия

$$A^T \vec{M} = \vec{P}, \quad (5)$$

и уравнение равновесия в перемещениях

$$A^T (C \Delta \vec{v}) = (A^T C A) \vec{v} = \vec{P}, \quad (6)$$

где использовался закон Гука с матрицей жёсткости C

$$\vec{M} = C \Delta \vec{v}.$$

Матрицы A (3) и A^T (5) взаимно транспонированы.

Заметим: матрицу A^T в уравнениях равновесия элементов балки (5) можно получить, составляя их обычным образом как уравнения проекций и моментов (рисунок 1); соответственно получают выражения для деформаций (3), то есть, в конечном счёте, уравнения для перемещений

$$\vec{M} = C A \vec{v}. \quad (7)$$

Для примера рассмотрим балку с тремя элементами на рисунке 1. Уравнения равновесия её трех элементов (5)

$$\begin{cases} P_1 = Q_1, \\ m_1 = -M_1, \\ P_2 = -Q_1 + Q_2, \\ m_2 = Q_1 l_1 + M_1 - M_2, \\ P_3 = -Q_2, \\ m_3 = Q_2 l_2 + M_2; \end{cases}$$

их матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Деформации (3)

$$v'' = \frac{M_x}{EI_x} = \frac{M_0 + Q_0 z}{EI_x}, \quad (9)$$

где жёсткость текущего поперечного сечения

$$EI_x = E \frac{b(z)h^3}{12} = EI_0 [\beta + (1-\beta)k]$$

и введены обозначения

$$\Delta \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta v_1 = v_1 - v_2 + \varphi_2 l_1, \\ \Delta \varphi_1 = (-\varphi_1 + \varphi_2), \\ \Delta v_2 = v_2 - v_3 + \varphi_3 l_2, \\ \Delta \varphi_3 = (-\varphi_2 + \varphi_3). \end{cases} \quad (8)$$

$$\beta = \frac{b}{B}, k = \frac{z}{l}, I_0 = \frac{Bh^3}{12} \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение (9) принимает в обозначениях (10) вид

$$\frac{d^2 v}{dk^2} = \frac{M_0 l^2}{EI_0 (1-\beta)} \cdot \frac{\gamma}{1+\gamma k} + \frac{Q_0 l^3}{EI_0} \cdot \frac{\gamma k}{1+\gamma k}, \quad \gamma = \frac{1-\beta}{\beta} \quad (11)$$

Найдём теперь матрицу жесткости в законе (7).

Проинтегрируем дифференциальное уравнение упругой кривой трапецевидной упругой связи (рисунок 2)

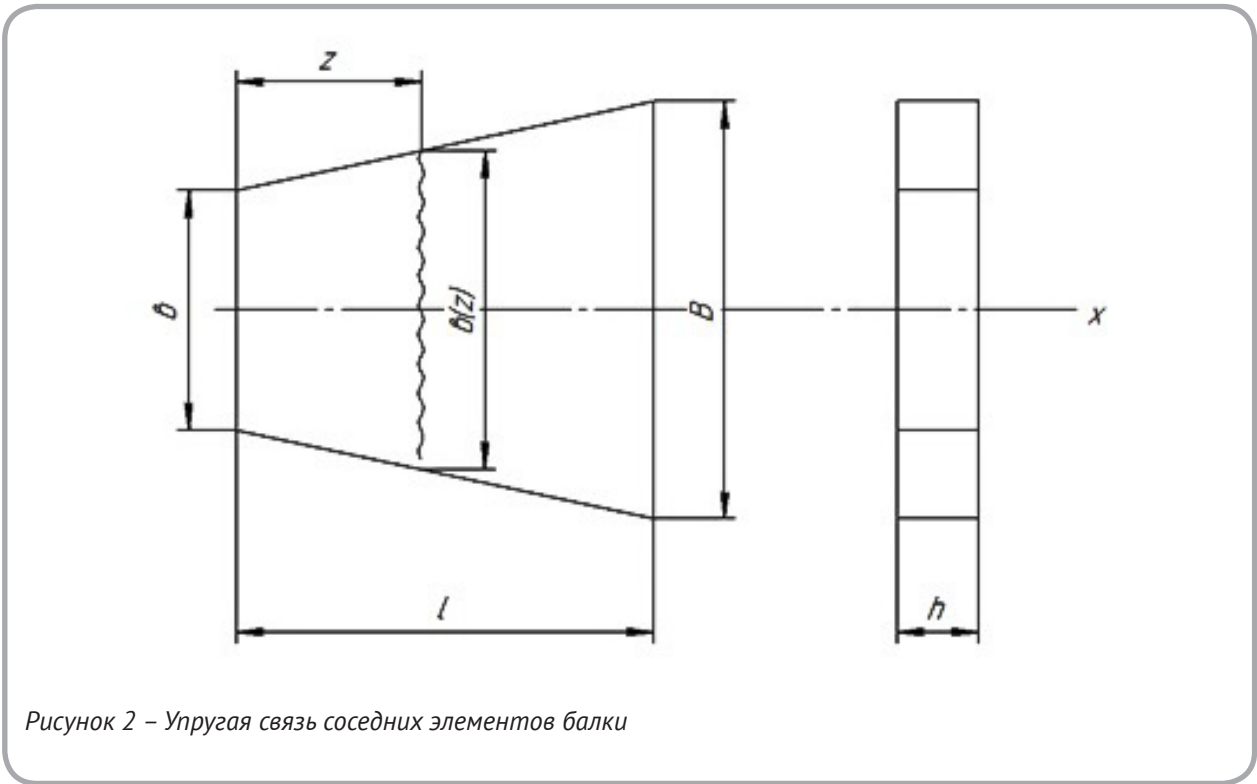


Рисунок 2 – Упругая связь соседних элементов балки

После интегрирования уравнения (11)

$$\varphi l = \frac{dv}{dk} = \frac{M_0 l^2}{EI_0(1-\beta)} [\ln(1+\gamma k)] + \frac{Q_0 l^3}{EI_0(1-\beta)} \left[k - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma k) \right] + C. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования в формуле (12) найдём из начального условия $\varphi(z=0) = \varphi l(k=0) = \varphi_0 l : C = \varphi_0 l$.

После второго интегрирования с подстановкой начального условия $v(z=0) = v_0$ получим выражение

$$v = \frac{M_0 l^2}{EI_0(1-\beta)} \left[\frac{1+\gamma k}{\gamma} \ln(1+\gamma k) - k \right] + \frac{Q_0 l^3}{EI_0(1-\beta)} \left[\frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1+\gamma k}{\gamma} \ln(1+\gamma k) + \frac{k}{\gamma} \right] + \varphi_0 l k + v_0. \quad (13)$$

Заметим: в случае балки с кусочно-постоянной жёсткостью формулы (12, 13) получают вид (в результате предельного перехода по Лопиталю при $\beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 0$), известный как решение, полученное методом начальных параметров [3, с. 337].

Располагая формулами (12, 13), найдём вначале выражения для деформаций (8) (полагая в указанных формулах $k=1$). Выразим угол поворота и перемещение, например, элемента 2 (рисунки 1):

$$EI_{01}(1-\beta_1)v_2 = EI_{01}(1-\beta_1)v_1 + EI_{01}(1-\beta_1)\varphi_1 l + Q_1 l^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \ln(1+\gamma) + \frac{1}{\gamma} \right] + M_1 l^2 \left[\frac{1+\gamma}{\gamma} \ln(1+\gamma) - 1 \right],$$

$$EI_{01}(1-\beta_1)\varphi_2 = EI_{01}(1-\beta_1)\varphi_1 + Q_1 l^2 \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma) \right] + M_1 l_1 [\ln(1+\gamma)].$$

После этого деформации (8)

$$\begin{cases} EI_{01}(1-\beta_1)\Delta v_1 = Q_1 l^3 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma^2} \ln(1+\gamma) - \frac{1}{\gamma} \right] + M_1 l_1^2 \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma) \right], \\ EI_{01}(1-\beta_1)\Delta \varphi_1 l = Q_1 l^3 \left[1 - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma) \right] + M_1 l_1^2 [\ln(1+\gamma)]. \end{cases} \quad (14)$$

Как видим, матрица уравнений (14) симметричная. В упомянутом выше предельном переходе при $\beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 0$

$$\begin{cases} EI_1 \Delta v_1 = \frac{1}{3} Q_1 l_1^3 + \frac{1}{2} M_1 l_1^2, \\ EI_1 \Delta \varphi_1 = \frac{1}{2} Q_1 l_1^3 + M_1 l_1^2. \end{cases} \quad (15)$$

Из уравнений вида (14, 15) внутренние усилия выражаются через деформации (8), образуя матрицу жёсткости, в «овалах» которой заключены нули.

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{12}^2 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \begin{bmatrix} C_{11}^3 & C_{12}^3 \\ C_{21}^3 & C_{22}^3 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Последняя из симметричных матриц 2×2 (её элементы помечены верхним индексом 3) имеет вид, следующий из уравнений (15):

$$C^3 = \begin{bmatrix} C_{11}^3 & C_{12}^3 \\ C_{21}^3 & C_{22}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_3}{l_3^3} & -6 \frac{EI_3}{l_3^2} \\ -6 \frac{EI_3}{l_3^2} & 4 \frac{EI_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

На рисунке 3 изображена расчётная схема стелечного узла, представленная балкой с кусочно-линейной (изменяющейся вдоль балки по линейному закону) жёсткостью поперечного сечения.

Для проверки расчётных значений на практике было проведено экспериментальное исследование прогибов стелечного узла на устройстве для испытания геленок, стелечных узлов и готовой обуви на жесткость и упругость, разработанном с профессором Горбачиком В.Е. [4, 5]. Устройство позволяет максимально приближать условия нагружения при испытании к реальным нагружениям геленочной части при эксплуатации.

Для исследования использовался стелечный узел наиболее распространённой в настоящее время конструкции: полустелька нижняя (картон повышенной жёсткости MERCKENS CJM 888 2,5 мм) + основная стелька (картон Flexap 1,5 мм) + геленок (сталь) + полустелька верхняя (картон MERCKENS CJM 158 1,2 мм).

При проведении исследования стелечный узел неподвижно закреплялся в пяточной части (точка 4 на рисунке 3), нагрузка прикладывалась в точке 1 (носочная часть узла), величина прогибов измерялась в точках 1, 2, 3. На рисунке указаны расчётные значения прогибов, а в скобках – значения, полученные экспериментальным путём. Как видно, для точек 1, 2, 3 расхождения расчётного и экспериментального значений для данного стелечного узла составили 8,3 %, 8,7 % и 5,6 % соответственно (расхождения могут быть вызваны неоднородностью свойств материалов).

Таким образом, расчётные значения и величины прогибов, полученных экспериментальным путём, различаются в пределах 10 %. Перемещения геленочной части стелечного узла, которые нас интересуют, отличаются от расчёта.

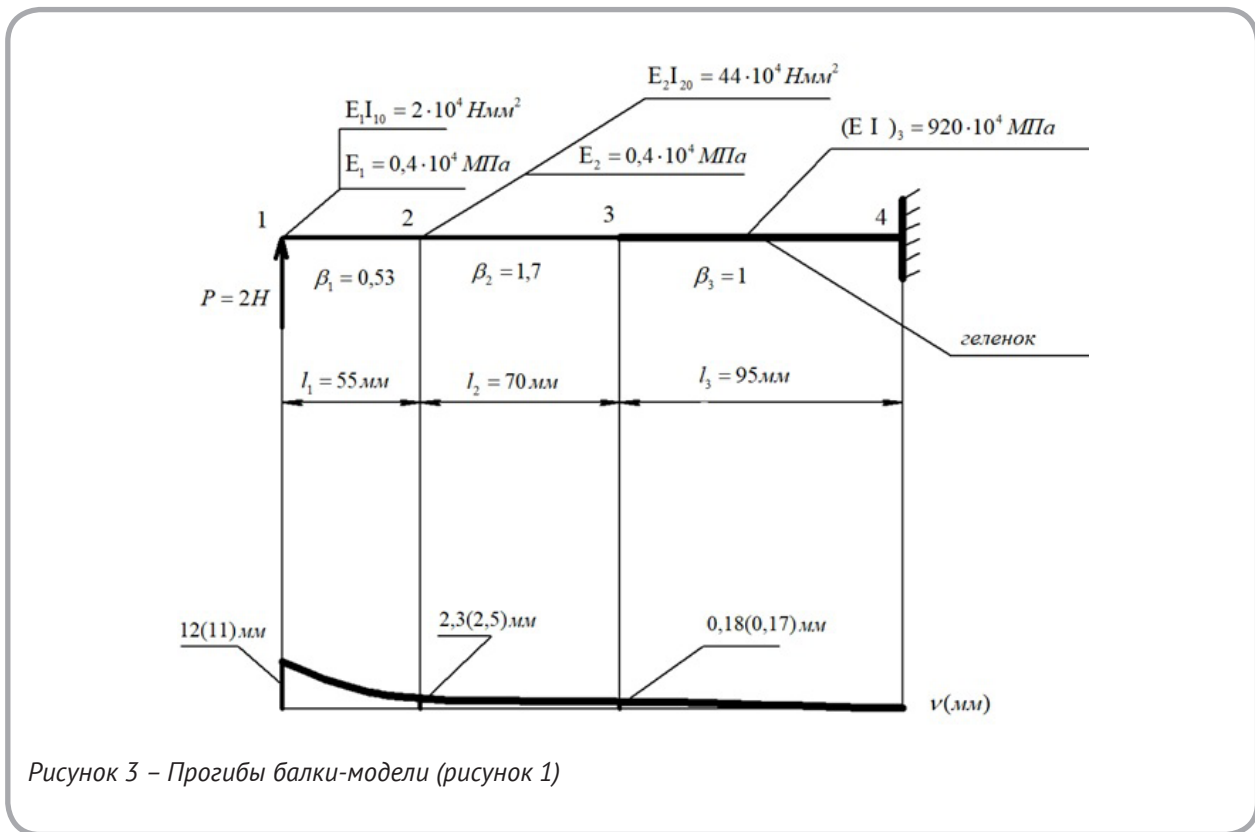


Рисунок 3 – Прогибы балки-модели (рисунок 1)

ных значений только на 8,7 %, следовательно, разработанный алгоритм позволяет достаточно точно определять прогибы стелечного узла под воздействием нагрузки, что даёт возможность оценивать жёсткость стелечного узла, не проводя дополнительных исследований.

Внутренние усилия \vec{M} в уравнении (7) выражаются посредством двух матриц – матрицы жёсткости (16) и транспонированной матрицы уравнений равновесия (5), входящей в уравнение (8), через перемещение (2). Для трёх участков заделки имеем

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} Q_1 = P \\ M_1 = 0 \\ Q_2 = P \\ M_2 = Pl_1 \\ Q_3 = P \\ M_3 + P(l_1 + l_2) \end{bmatrix} = CA \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 = 0 \\ \varphi_4 = 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где структура матрицы жёсткости C представлена выражением (16), транспонированная матрица уравнений равновесия, аналогичная матрице (8),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

В произведении в правой части уравнения (17) получим линейные алгебраические выражения, образующие вектор-столбец

$$\begin{bmatrix} f_1(v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2) \\ g_1(v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2) \\ f_2(v_2, \varphi_2, v_3, \varphi_3) \\ g_2(v_2, \varphi_2, v_3, \varphi_3) \\ f_3(v_3, \varphi_3, v_4, \varphi_4) \\ g_3(v_3, \varphi_3, v_4, \varphi_4) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Выражения (19) получаются перемножением матриц 2×2 в матрице (16) на матрицы (2×4) в матрице (18). В защемлённом узле перемещения v_4, φ_4 равны нулю. Два последних уравнения (17,19) дают перемещения v_3, φ_3 . Их подстановка во вторую группу уравнений (17,19) даёт опять же систему двух уравнений, откуда находятся перемещения v_2, φ_2 . Наконец, их подстановка в первые два уравнения даст систему двух уравнений относительно v_1, φ_1 . Именно так находятся перемещения на рисунке 3.

Таким образом, полученный алгоритм может быть распространён на любое число участков, с любым числом сил с произвольными очертаниями упругих связей и легко поддаётся программированию. Алгоритм с достаточной степенью точности позволяет определить прогибы стелечного узла при заданной нагрузке при использовании различных конструкций и различных материалов комплектующих, поэтому может быть использован для рационального подбора материалов, обеспечивающих жёсткость геленочной части стелечного узла на этапе конструкторско-технологической подготовки производства, что позволит выпускать обувь с заданным уровнем потребительских свойств.

В статье приняты следующие обозначения: $\vec{P}(H)$ – вектор-столбец, \vec{P}^T – векторы-строки заданных сил $P_i(H)$ и моментов $m_i(H \cdot мм)$; \vec{M} – вектор-столбец внутренних сил – поперечных сил $Q_i(H)$, изгибающих моментов $M_i(H \cdot мм)$, перемещений несущих элементов (рисунок 1) – прогибов $v_i(мм)$, углов поворота $\varphi_i(рад)$, деформаций упругих связей $\Delta v_i(мм)$, $\Delta \varphi_i(рад)$; A, A^T – матрица и транспонированная матрица: первая матрица линейной связи деформаций и перемещений, вторая – матрица уравнений равновесия, C – матрица жёсткости; $M_o(H \cdot мм), Q_o(H)$ – начальные изгибающий момент, поперечная сила; $I_o(мм^4)$ – момент инерции начального поперечного сечения, $\varphi^o(рад)$, $v_o(мм)$ – угол поворота и прогиб начального сечения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Борисова, Т. М., Федосеев, Г. Н., Горбачик, В. Е. (2012), Разработка методики расчёта жёсткости геленочной части обуви, *Дизайн и технологии*, Москва, 2012, № 29 (71), С. 33–42.
2. Дарков, А. В. (1976), *Сопротивление материалов*, Москва, 600 с.
3. Дарков, А. В., Шпиро, Г. С. (1969), *Строительная механика*, Москва, 734 с.
4. Борисова, Т. М., Горбачик, В. Е. (2011), Устройство для испытания геленков, стелечных узлов и готовой обуви на жесткость и упругость, *Вестник ВГТУ*, 2011, № 21, С. 34–41.
5. Борисова, Т. М., Горбачик, В. Е. (2012), *Устройство для испытания деталей низа и готовой обуви на жесткость и упругость*, № а 20101560; заявл. 29.10.2010; опубл. 30.06.2012, Бюл. № 3, Витебский государственный технологический университет, С. 27.

REFERENCES

1. Borisova, T. M., Fedoseev, G. N., Gorbachik, V. E. (2012), Develop methods for calculating rigidity the shank part of footwear [Razrabotka metodiki raschjota zhjostkosti gelenochnoj chasti obuvi], *Design and technology*, Moscow, 2012, № 29 (71), pp. 33–42.
2. Darkov, A. V. (1976), *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials], Moscow, 600 p.
3. Darkov, A. V. , Shpiro, G. S. (1969), *Stroitel'naja mehanika* [Structural mechanics], Moscow, 734 p.
4. Borisova, T. M., Gorbachik, V. E. (2011), Device for test shanks stiffener, insole knots and ready footwear on acerbity and bounce [Ustrojstvo dlya ispytaniya gelenkov, stelechnyh uzlov i gotovoj obuvi na zhestkost' i uprugost'], *Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta – Vestnik of Vitebsk State Technological University*, 2011, № 21, pp. 34–41.
5. Borisova, T. M., Gorbachik, V. E. (2012), *Ustrojstvo dlja ispytanija detalej niza i gotovoj obuvi na zhestkost' i uprugost'* [Device for test the details of the bottom and finished shoes on acerbity and bounce], State Register of Patents of Belarus, Minsk, BY, Req. № a 20101560; zajavl. 29.10.2010; opubl. 30.06.2012, Bjul. №3, Vitebsk State Technological University, P. 27.

Статья поступила в редакцию 14. 05. 2020 г.